РЕШЕЊА

ПРИПРЕМНИ ЧАС БРОЈ 7

① Дата је правилна шестострана пирамида код које је површина основе три пута мања од површине омотача. Ако је $H = 4 cm$ наћи површину те пирамиде.

Решење:

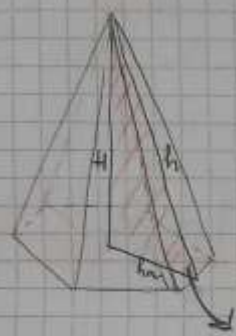
$M = 3B$

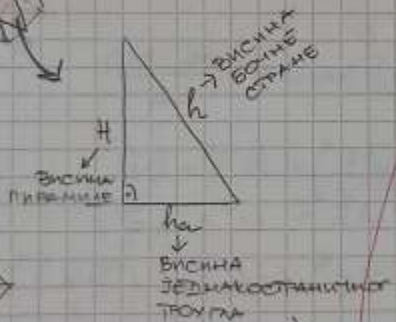
омотач, база (основа)

$H = 4 cm$

висина пирамиде

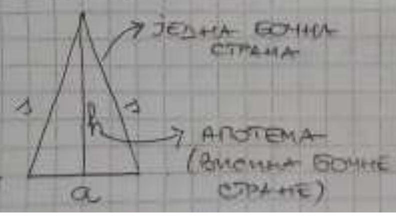
$P = ?$





База се састоји из 6 једнакостраничних троуглова

Омотач се састоји из 6 једнакокраких троуглова



$P = B + M$

$P = B + 3B$

$P = 4B$

$P = 4 \cdot 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$\boxed{P = 6 \cdot a^2\sqrt{3}}$

$M = 6 \cdot \frac{a \cdot h}{2}$

$M = 3 \cdot a h$

$M = 3B$

$3ah = 3 \cdot 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$\boxed{h = 3 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}$

Користећи Питагорину теорему имаћемо:

$h^2 = h_a^2 + H^2$

$\left(\frac{3a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 4^2$

$\frac{9a^2 \cdot 3}{4} = \frac{a^2 \cdot 3}{4} + 16 \quad / \cdot 4$

$27a^2 = 3a^2 + 64$

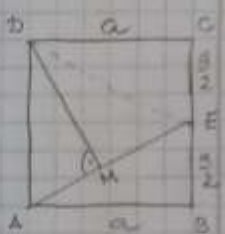
$24a^2 = 64 \Rightarrow a^2 = \frac{64}{24} = \frac{8}{3}$

$P = 6 \cdot a^2\sqrt{3} = 6 \cdot \frac{8}{3}\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$

$\boxed{\text{РЕШЕЊЕ}: P = 16\sqrt{3}\, cm^2}$

② Нека је E средиште странице BC квадрата ABCD странице $2\sqrt{5}$ cm и M подножје нормале из D на AE. Израчунати дужину DM.

Решење:



$a = 2\sqrt{5}$ cm

$DM = ?$

$$P_{\Delta ADE} = P_{\square ABCD} - (P_{\Delta ABE} + P_{\Delta DCE})$$

$$P_{\Delta ABE} = \frac{a \cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{a^2}{4} = \left(\frac{2\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{4 \cdot 5}{4} = \underline{5}$$

$$P_{\Delta ABE} = P_{\Delta DCE} = \underline{5}$$

$$P_{\square ABCD} = a^2 = \underline{20}$$

$$P_{\Delta ADE} = 20 - (5 + 5) = \underline{10}$$

$$P_{\Delta ADE} = \frac{AE \cdot MD}{2}$$

$$AE^2 = AB^2 + BE^2$$

$$AE^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$AE^2 = (2\sqrt{5})^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$AE^2 = 20 + 5$$

$$AE^2 = 25$$

$$\boxed{AE = 5}$$

$$P_{\Delta ADE} = \frac{AE \cdot DM}{2} = 10$$

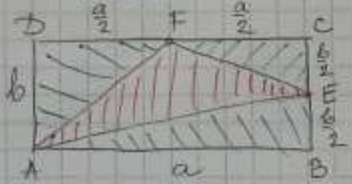
$$\frac{5 \cdot DM}{2} = 10$$

$$DM = 4$$

$$\boxed{\text{Решење } DM = 4 \text{ cm}}$$

③ Површина правоугаоника ABCD је $36cm^2$. Ако су E и F средишта страница BC односно CD, одреди површину троугла AEF.

Решење:



$P = 36cm^2$

$P_{\Delta AEF} = ?$

$P = 36 = a \cdot b$

$\boxed{ab = 36}$

$P_{\Delta AEF} = P - (P_{\Delta ABE} + P_{\Delta ECF} + P_{\Delta FDA})$

$P_{\Delta ABE} = \frac{a \cdot \frac{b}{2}}{2} = \frac{ab}{4} = \frac{36}{4} = 9$

$P_{\Delta ECF} = \frac{\frac{b}{2} \cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{ab}{8} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$

$P_{\Delta FDA} = \frac{\frac{a}{2} \cdot b}{2} = \frac{ab}{4} = \frac{36}{4} = 9$

$P_{\Delta AEF} = 36 - \left(9 + \frac{9}{2} + 9\right)$

$P_{\Delta AEF} = 36 - \left(\frac{18 + 9 + 18}{2}\right)$

$P_{\Delta AEF} = 36 - \frac{45}{2}$

$P_{\Delta AEF} = \frac{72 - 45}{2}$

$P_{\Delta AEF} = \frac{27}{2}$

$\boxed{\text{Решење} \quad P_{\Delta AEF} = \frac{27}{2}\ cm^2}$

4) Реши неједначину $\frac{3x^2-x-20}{x^2-2x-8}<2$.

Решење:

$$\frac{3x^2-x-20}{x^2-2x-8}<2$$

$$\frac{3x^2-x-20}{x^2-2x-8}-2<0$$

$$\frac{3x^2-x-20}{x^2-2x-8}-2<0$$

$$\frac{3x^2-x-20-2(x^2-2x-8)}{x^2-2x-8}<0$$

$$\frac{3x^2-x-20-2x^2+4x+16}{x^2-2x-8}<0$$

$$\frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}<0$$

$$x^2+3x-4=x^2+4x-x-4=\underbrace{x^2-x}+4\underbrace{x-4}=x(x-1)+4(x-1)=$$
$$=(x-1)(x+4)$$

$$x^2-2x-8=x^2-4x+2x-8=x(x-4)+2(x-4)=$$
$$=(x+2)(x-4)$$

$$\frac{(x-1)(x+4)}{(x+2)(x-4)}<0,\quad x\neq 4,\ x\neq -2$$

Решење: $x\in(-4,-2)\cup(1,4)$

5) РЕШИ ЈЕДНАЧИНУ $|2x-1|-3x=2x+8$.

РЕШЕЊЕ:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

$$|2x-1|=\begin{cases} 2x-1, & 2x-1\geq 0 \Rightarrow 2x\geq 1 \Rightarrow x\geq \frac{1}{2} \\ -(2x-1), & 2x-1<0 \Rightarrow x<\frac{1}{2} \end{cases}$$

I $x\geq \frac{1}{2}$

$$2x-1-3x=2x+8$$
$$-3x=9$$
$$x=-3$$

Због $x\geq\frac{1}{2}$, $x=-3$ није решење

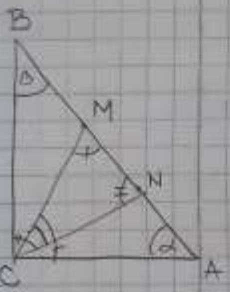
II $x<\frac{1}{2}$

$$-(2x-1)-3x=2x+8$$
$$-2x+1-3x=2x+8$$
$$-7x=7$$
$$x=-1$$

Због $x<\frac{1}{2}$, $x=-1$ јесте решење

$\boxed{\text{Решење } x=-1}$

⑥ У правоуглом троуглу ABC на хипотенузи AB дате су тачке M и N тако да је AM = AC и BN = BC. Израчунај угао MCN?



$M, N \in AB$

$AM = AC \wedge BN = BC$

$\sphericalangle MCN = ?$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \\ \triangle ABC \text{ правоугли}\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\alpha + \beta = 90^\circ}$$

$BN = BC \Rightarrow \triangle BCN$ је једнакокраки

$\sphericalangle BCN = \sphericalangle BNC$

$AM = AC \Rightarrow \triangle AMC$ је једнакокраки

$\sphericalangle ACM = \sphericalangle AMC$

$\alpha + 2\sphericalangle ACM = 180^\circ$

$$\boxed{\sphericalangle ACM = \frac{180^\circ - \alpha}{2}}$$

$\beta + 2\sphericalangle BCN = 180^\circ$

$$\boxed{\sphericalangle BCN = \frac{180^\circ - \beta}{2}}$$

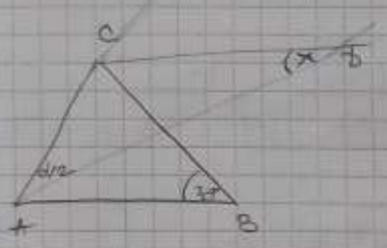
$$\sphericalangle ACM + \sphericalangle BCN = \frac{180^\circ - \alpha}{2} + \frac{180^\circ - \beta}{2} = \frac{360^\circ - (\alpha + \beta)}{2} = \frac{360^\circ - 90^\circ}{2}$$

$$= \frac{270^\circ}{2} = 135^\circ$$

$90^\circ + \sphericalangle MCN = 135^\circ$

$\boxed{\text{Решење } \sphericalangle MCN = 45^\circ}$

(7) Израчунати угао који гради симетрала угла BAC са симетралом спољашњег угла код темена C. ∡ABC је 30°.



$$\sphericalangle ABC = 30^\circ$$

$$x = ?$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - 30^\circ$$

$$\gamma = 150^\circ - \alpha$$

$$\gamma_1 = \alpha + 30^\circ$$

спољашњи угао једнак је збиру њему два несуседна унутрашња угла

посматрајмо $\triangle ACD$

$$\frac{\alpha}{2} + \left(\gamma + \frac{\gamma_1}{2}\right) + x = 180^\circ$$

$$\frac{\alpha}{2} + \left(\gamma + \frac{\alpha + 30^\circ}{2}\right) + x = 180^\circ$$

$$\cancel{\frac{\alpha}{2}} + \left(150^\circ - \cancel{\alpha} + \cancel{\frac{\alpha}{2}} + 15^\circ\right) + x = 180^\circ$$

$$165^\circ + x = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - 165^\circ$$

$$\boxed{\text{Решење} \quad x = 15^\circ \quad !}$$

8) Ако је $a = 123^4$, израчунај $\dfrac{\sqrt{\left(\dfrac{-a^3 a^5}{a\,(a^2)^3}\right)^2}}{a}$

$$\frac{\sqrt{\left(\dfrac{-a^3a^5}{a(a^2)^3}\right)^2}}{a} = \frac{\sqrt{\left(\dfrac{-a^8}{a^7}\right)^2}}{a} = \frac{\sqrt{(-a)^2}}{a} = \frac{|-a|}{a} = \frac{a}{a} = 1$$

~~Нап~~ Напомена: $\sqrt{x^2} = |x|$

$\boxed{\text{Решење је } 1.}$

9) Ако је $P=\frac{(-m^3)^2\cdot m^5}{(-m)^7}$ и $Q=\frac{m^6+m^6}{m^6:(-m^2)}$, при чему је $m=\sqrt{2}$. Одреди $\sqrt{\frac{P}{Q}}$.

Решење: $P=\frac{(-m^3)^2\cdot m^5}{(-m)^7}=\frac{m^6\cdot m^5}{-m^7}=\frac{m^{11}}{-m^7}=\underline{\underline{-m^4}}$

$$Q=\frac{m^6+m^6}{m^6:(-m^2)}=\frac{2m^6}{-m^4}=\underline{\underline{-2m^2}}$$

$$\sqrt{\frac{P}{Q}}=\sqrt{\frac{-m^4}{-2m^2}}=\sqrt{\frac{m^2}{2}}\underset{m=\sqrt{2}}{=}\sqrt{\frac{(\sqrt{2})^2}{2}}=\sqrt{\frac{2}{2}}=\sqrt{1}=\underline{\underline{1}}$$

$$\boxed{\text{Решење: } \sqrt{\frac{P}{Q}}=1.}$$

(10) Реши једначину $\frac{x-3}{x}+\frac{2x+6}{x}=\frac{2}{3}$.

Решење:

$$\frac{x-3}{x}+\frac{2x+6}{x}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{x-3+2x+6}{x}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{3x+3}{x}=\frac{2}{3} \quad / \cdot 3x,\ x\neq 0$$

$$3(3x+3)=2x$$

$$9x+9=2x$$

$$9x-2x=-9$$

$$7x=-9$$

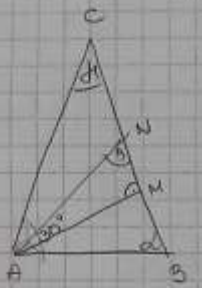
$$x=-\frac{9}{7}$$

Решење: $x=-\frac{9}{7}$

Напомена: $\frac{A}{B}=0 \Leftrightarrow A=0 \wedge B\neq 0$.

(11) У једнакокраком троуглу симетрала на основици и висина конструисана из истог темена гради угао од 30°. Одреди остале углове троугла.

Решење:



Посматрамо $\triangle AMN$

$$\measuredangle NAM + \measuredangle AMN + \measuredangle MNA = 180^\circ$$
$$30^\circ + 90^\circ + \beta = 180^\circ$$
$$\underline{\beta = 60^\circ}$$

Посматрамо $\triangle ANB$

$$\measuredangle NAB + \measuredangle ABN + \measuredangle BNA = 180^\circ$$
$$\frac{\alpha}{2} + \alpha + \beta = 180^\circ \quad / \cdot 2$$
$$\alpha + 2\alpha + 2\beta = 360^\circ$$
$$3\alpha + 2 \cdot 60^\circ = 360^\circ$$
$$3\alpha + 120^\circ = 360^\circ$$
$$3\alpha = 360^\circ - 120^\circ$$
$$3\alpha = 240^\circ$$
$$\alpha = 80^\circ$$

Посматрамо $\triangle ABC$

$$\alpha + \alpha + \gamma = 180^\circ$$
$$80^\circ + 80^\circ + \gamma = 180^\circ$$
$$\gamma = 20^\circ$$

Решење: Углови су 80°, 80° и 20°.

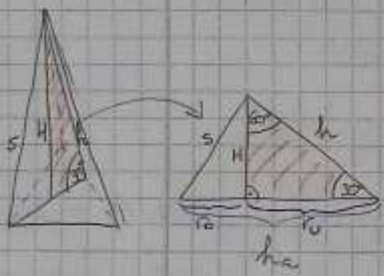
(12) Бочна страна правилне тростране пирамиде образује са равни основе угао од $30°$. Ако је површина основе $9\sqrt{3}\,cm^2$, израчунај запремину ове пирамиде.

Решење:

$B = 9\sqrt{3}\,cm^2$

$\alpha = 30°$

$V = ?$



h - висина бочне стране

H - висина пирамиде

h_a - висина једнакостр. троугла у основи

$\alpha = 30°$ - угао између бочне стране и равни основе

⇓

угао који зкалапају висина бочне стране и висина једнакостр. троугла

r_u - полупречник уписане кружнице

r_o - полупречник описане кружнице

$$V = \frac{B \cdot H}{3}$$

$$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

$$a^2 = 36 \Rightarrow \boxed{a = 6\,cm}$$

$$h_a = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{h_a = 3\sqrt{3}\,cm}$$

$$r_u = \frac{1}{3}h_a = \frac{1}{3}\,3\sqrt{3}$$

$$\boxed{r_u = \sqrt{3}\,cm}$$

$$r_u = \frac{2H\sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt{3} = H\sqrt{3}$$

$$\boxed{H = 1\,cm}$$

$$V = \frac{B \cdot H}{3}$$

$$V = \frac{9\sqrt{3} \cdot 1}{3}$$

$$V = 3\sqrt{3}\,cm^3$$

Решење: $\boxed{V = 3\sqrt{3}\,cm^3}$